I. Intégral d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$:

a. Définition :

f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et F est une primitive de f sur $[a,b]$.

Le nombre $F(b)-F(a)$ est appelé intégral de f de a à b , on note $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$.

On lit intégral de a à b de $f(x)dx$.

b. Remarque :

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ on peut remplacer le variable x soit par les variables y et z et $t\cdots$ donc :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(y)dy=\int_a^b f(t)dt=\cdots$$

c. Exemple :

Calculons :

- $\int_0^1 (x^2-2x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}1^3-1^2\right)-\left(\frac{1}{3}0^3-0^2\right)=-\frac{2}{3}$.
- $\int_1^0 (x^2-2x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^0=\left(\frac{1}{3}0^3-0^2\right)-\left(\frac{1}{3}1^3-1^2\right)=\frac{2}{3}$.
- $\int_2^{1+e}\frac{4}{x-1}dx=\int_2^{1+e}4\times\frac{(x-1)'}{x-1}dx=\left[4\ln|x-1|\right]_2^{1+e}=\left(4\ln(1+e-1)-4\ln(2-1)\right)=4$
- $4\int_2^{1+e}\frac{1}{x-1}dx=4\int_2^{1+e}\frac{(x-1)'}{x-1}dx=4\left[\ln|x-1|\right]_2^{1+e}=4\left(\ln(1+e-1)-\ln(2-1)\right)=4$.

On remarque que :

- $\int_0^1 (x^2-2x)dx=-\int_1^0 (x^2-2x)dx$.
- $\int_2^{1+e}\frac{4}{x-1}dx=4\int_2^{1+e}\frac{1}{x-1}dx$.

II. Propriétés : relation de Shales – linéarité – ordre .

a. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un segment $[a,b]$ et sa fonction dérivée f' est continue sur $[a,b]$ on a :

- $\int_a^b f'(x)dx=[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$.
- $\int_a^b cdx=[cx]_a^b=c(b-a)$; $(c\in\mathbb{R})$.

b. Exemple :

- $\int_0^1 (x^2-2x)'dx=\left[x^2-2x\right]_0^1=(1^2-2\times1)-(0^2-2\times0)=-1$.
- $\int_3^5 7dx=7(5-3)=14$.

c. Relation de Chasles :

f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ on a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ avec $a \le c \le b$. (relation de Chasles) .

d. Exemples :

- $\int_5^5 (x^2 - 2x)dx = 0$
- $\int_0^1 (x^2 - 2x)dx = -\int_1^0 (x^2 - 2x)dx$
- $\int_0^3 |x-1|dx = \int_0^1 |x-1|dx + \int_1^3 |x-1|dx$

$$= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx \text{ (car } |x-1| = 1-x \text{ sur } [0,1] \text{ et } |x-1| = x-1 \text{ sur } [1,3] \text{)}$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{5}{2}$$

e. Linéarité :

f et g sont deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$ on a :

- $\begin{cases} \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \end{cases}$.

f. Exemples :

- **Exemple 1 :**

- $\int_2^{1+e} \frac{4}{x-1}dx = 4\int_2^{1+e} \frac{1}{x-1}dx$.
- On pose : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)dx$

1. On calcule : $A+B$ et $A-B$.
2. On déduit les valeurs de A et B .

Correction :

1. On calcule $A+B$ et $A-B$.
   - ✓ On a :

$$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx + B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx$$

$$=1\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

Donc $A+B=\frac{\pi}{2}$

✓ On a :

$$A-B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)\,dx \qquad ;\ \left(\cos^2(x)-\sin^2(x)=\cos 2x\right)$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin(\pi)-\sin 0\right)$$

$$=0$$

Donc $A+B=\frac{\pi}{2}$

2. On déduit les valeurs de A et B.

On a : $\left.\begin{array}{l} A+B=\frac{\pi}{2} \\ A-B=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=B=\frac{\pi}{4}$.

Conclusion : $A=B=\frac{\pi}{4}$.

- **Exemple 2 :**

Montrer que : $\int_2^5 \ln(x+1)\,dx \le \int_2^5 \ln(x+3)\,dx$.

Sachant que :

$$1\le 3 \Rightarrow x+1\le x+3$$

$$\Rightarrow \int_2^5 (x+1)\,dx \le \int_2^5 (x+3)\,dx$$

Conclusion : $\int_2^5 \ln(x+1)\,dx \le \int_2^5 \ln(x+3)\,dx$.

III. Valeur moyenne :

a. Propriété :

f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et $a<b$.

- Il existe au moins un élément c de $[a,b]$ tel que : $(b-a)\times f(c)=\int_a^b f(x)\,dx$.
- Le nombre $f(c)=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[ab]$.

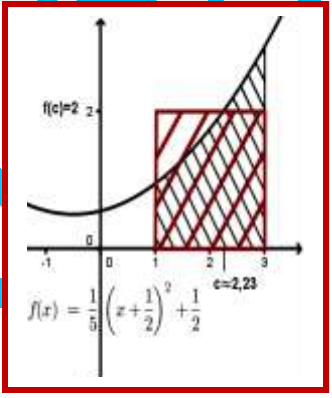
b. Exemple :

Soit $f(x)=3x$.

1. On détermine la valeur moyenne de f sur $[0,2]$:

On a : $f(c)=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2-0}\int_0^2 3x\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^2=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}(4-0)=3$.

Conclusion : la valeur moyenne de f sur $[0,2]$ est $f(c)=3$.



IV. L' intégration par parties :

a. Théorème :

u et v sont deux fonctions dérivables sur $[ab]$ leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[ab]$ on a

$$\underbrace{\int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx}_{(1)}=\underbrace{\left[u(x)\times v(x)\right]_a^b}_{(2)}-\underbrace{\int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx}_{(3)}$$

b. Méthode ou bien disposition :

$u(x)=\cdots$ $\quad$ $u'(x)=\cdots$

$(1)\downarrow$ $\quad$ $(2)\searrow$ $\quad$ - $\quad$ $\downarrow(3)$

$v'(x)=\cdots$ $\quad$ $v(x)=\cdots$

c. Exemples :

- On calcule : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ en utilisant une intégration par parties .

On pose :

$u(x)=x$ $\quad$ $u'(x)=1$

$(1)\downarrow$ $\quad$ $(2)\searrow$ $\quad$ - $\quad$ $\downarrow(3)$

$v'(x)=\cos x$ $\quad$ $v(x)=\sin x$

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\times\sin x\,dx$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0\sin 0\right)-\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\frac{\pi}{2}+0-1=\frac{\pi}{2}-1$$

Conclusion : $I = \frac{\pi}{2} - 1$.

- On calcule : $J = \int_1^e x\ln(x)dx$ en utilisant l'intégration par parties .

On pose :

$$u(x) = \ln(x) \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$(1)\downarrow \qquad (2)\searrow \quad - \quad \downarrow(3)$$
$$v'(x) = x \qquad v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

D'où : $\int_1^e x\ln(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2dx$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2\ln(e) - 1^2\ln(1)\right) - \frac{1}{2}\int_1^e xdx$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1^2\right) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

Conclusion : $J = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$.

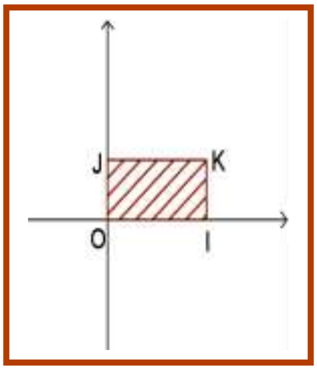
V. Applications sur les intégrales calculs des surfaces :

01. Calculs des surfaces :

a. Introduction :

➢ Unité d'aire (unité de surface):

- Le plan (P) est rapporté à un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
- on pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et le point K tel que OIKJ est parallélogramme .
- On considère la surface du parallélogramme OIKJ comme unité d'aire (du la surface) cette aire on la note 1 u.a

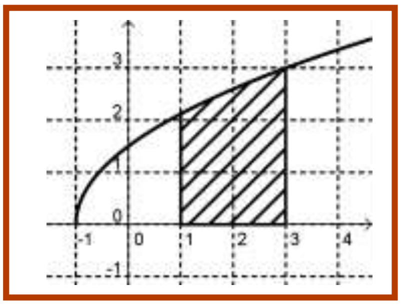


➢ L'aire (F) est la partie du plan (P) compris entre la courbe (C_f) et l'axe des abscisses

f est une fonction continue sur $[ab]$ et (C_f) la courbe de f .

- (F) est la partie du plan (P) compris entre la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
- On désigne par A la surface de la partie (F) du plan (P) .

Remarque : la surface A se calcule par l'intégral $\int_a^b f(x)dx$ et dépend du signe de $f(x)$



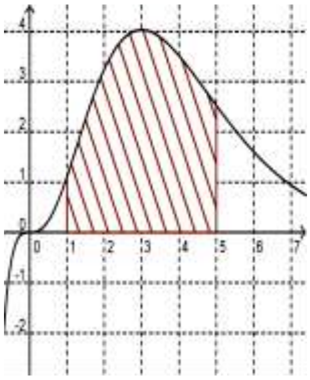
b. Propriété :

f est une fonction continue sur $[ab]$ et (C_f) la courbe de f dans le plan (P) est rapporté a un repère orthogonal $(0,\vec{i},\vec{j})$.

L'aire S (la surface) de la partie (F) du plan (P) comprise entre la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est $A=\int_a^b |f(x)|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$ (u.a) (unité d'aire)

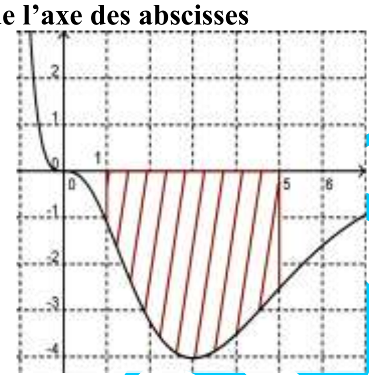
c. Les cas possibles :

La fonction f est positive sur $[ab]$.
(c'est-à-dire (C_f) au dessus de l'axe des abscisses



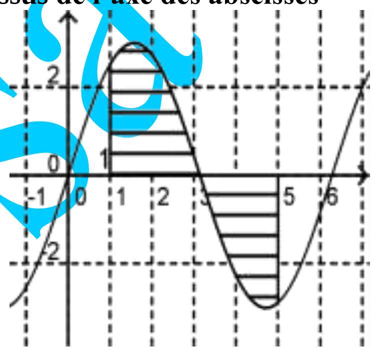
La surface est :
$A=\int_a^b f(x)dx\times\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$ u.a

La fonction f est négative sur $[ab]$.
(c'est-à-dire (C_f) au dessous de l'axe des abscisses



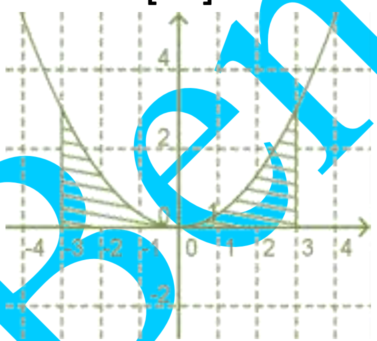
La surface est :
$A=-\int_a^b f(x)dx\times\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$ u.a

La fonction f est change de signe sur $[ab]$. (c'est-à-dire (C_f) au dessous et au dessus de l'axe des abscisses



La surface est :
$A=\int_a^b |f(x)|dx\times\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$ u.a
$=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx(u.a)$

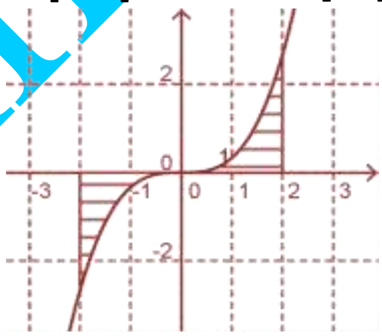
f est une fonction paire sur $[-a,a]$ est positive sur $[0,a]$.



On a:
$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ u.a

Remarque :
$\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$

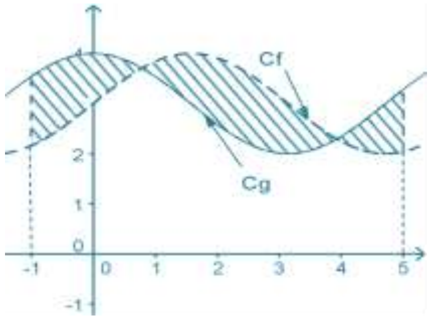
f est une fonction impaire sur $[-a,a]$ et positive sur $[0,a]$



On a est :
$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ u.a

Remarque : $\int_{-a}^a f(x)dx=0$
$\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx$

domaine du plan comprise entre les deux courbes (C_f) et (C_g)

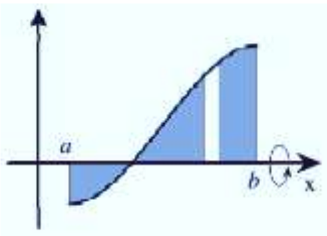


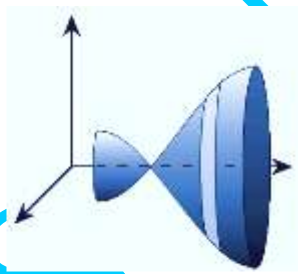
On considère $\mathcal{A}$ La surface du domaine du plan comprise entre les deux courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. La surface est :
$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\times\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$u.a

02. Calculs des volumes :

a. Approche :

- L'espace est muni d'un repère orthogonal $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
- $\left(C_f\right)$ la courbe d'une fonction continue sur $[ab]$ avec $(a<b)$.
- On suppose que $\left(C_f\right)$ tourne au tour de l'axe des abscisse de 360° la forme obtenue s'appelle le solide de révolution
- le solide de révolution obtenu à pour volume :





b. Propriété :

L'espace est muni d'un repère orthogonal $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
$\left(C_f\right)$ la courbe f est une fonction continue sur $[ab]$ avec $(a<b)$.
Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe $\left(C_f\right)$ de la fonction f sur $[a,b]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° son volume V est : $V=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|\times\left\|\vec{k}\right\|$ (unité de volume)

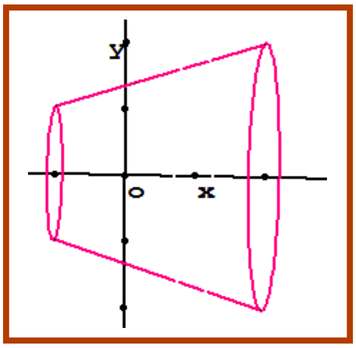
c. Exemple :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, tel que $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=\left\|\vec{k}\right\|=1cm$.

Exemple 1 :

On considère la fonction $f(x)=x-5$ sur $[-1,2]$, $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans le repère $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe $\left(C_f\right)$ de la fonction f sur $[a,b]$ au tour de l'axe des abscisse de 360° .



2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :

On a : $V=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|\times\left\|\vec{k}\right\|$ (unité de volume)

$$V=\int_{-1}^{2}\pi(x-5)^2 dx1\times1\times1\ cm^3$$

$$=\pi\int_{-1}^{2}(x-5)'(x-5)^2 dx\ cm^3$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}(x-5)^3\right]_{-1}^{2}\ cm^3$$

$$= \frac{\pi}{3}\left((-3)^3-(-6)^3\right)\ cm^3$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(-3^3+6^3\right)\ cm^3$$

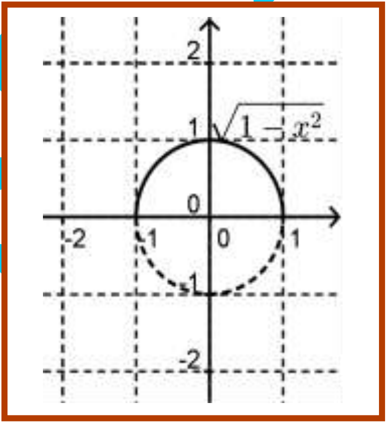
$$= 63\pi\ cm^3$$

Conclusion : le volume du solide de révolution est $V = 63\pi\ cm^3$.

Exemple 2 :

On considère la fonction $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$, (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$

1. On construit Le solide de révolution obtenu par la rotation de la courbe (C_f) de la fonction f sur $[a,b]$ au tour de l'axe des abscisse de 360°.



2. On calcule V le volume du solide de révolution obtenu :

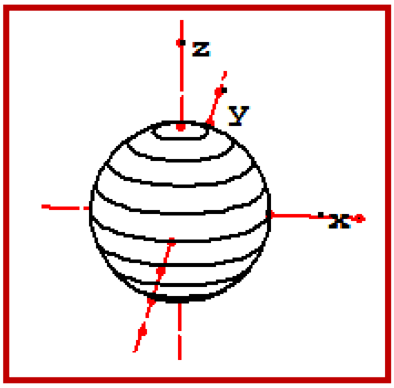
On a : $V=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\|\vec{k}\|$ (unité de volume)

$$V=\int_{-1}^{1}\pi\sqrt{1-x^2}^{\,2}dx 1\times1\times1\ cm^3$$

$$=\int_{-1}^{1}\pi\left(1-x^2\right)dx 1\times1\times1\ cm^3$$

$$=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}\ cm^3$$

$$=\frac{4\pi}{3}\ cm^3$$



Conclusion : le volume du solide de révolution est $V=\frac{4\pi}{3}\ cm^3$.

Remarque :

- c'est le volume d'une boule de rayon $R=1$.
- Si on la fonction $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ sur $[-R,R]$ avec $R>0$.

on obtient le volume d'une boule de rayon $R>0$: $V=\frac{4\pi R^3}{3}$.